Basisprüfung Lineare Algebra

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet (jeweils 6 Punkte).
- Begründen Sie Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung von Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Lineare Algebra	
Datum	21.8.2017	

1	2	3	4	5	6	Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Auch nicht mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!

1. (6 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren orthogonal sind.
- b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.
- c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.
- **2.** (6 Punkte) Gegeben sei das Ausgleichsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^2$ so dass

$$x = \underset{v \in \mathbb{R}^2}{\operatorname{arg\,min}} \|Av - b\|_2,\tag{1}$$

wobei

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Lösen Sie (1) mithilfe einer Singulärwertzerlegung.
- b) Schreiben Sie die Normalengleichungen für (1) in kompakter Form und lösen Sie sie.
- 3. (6 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{bmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.
- **b)** Bestimmen Sie ker(A) und Bild(A).
- **4.** (6 Punkte) Für alle $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sei $r_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $r_i(t) = t^i$. Sei $\mathcal{G}_3 = \operatorname{span}\{r_0, r_2, r_4\}$ und $\mathcal{U}_2 = \operatorname{span}\{r_1, r_3\}$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A} : \mathcal{G}_3 \to \mathcal{U}_2$ definiert für alle $x \in \mathcal{G}_3$ und alle $t \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} x \mapsto \mathcal{A}(x), \\ \mathcal{A}(x)(t) = tx''(t). \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, dass A eine lineare Abbildung ist.
- **b)** Durch welche Matrix A wird A beschrieben, wenn wir die Monome als Basen in beiden Räumen verwenden?

- c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von \mathcal{G}_3 und \mathcal{U}_2 sind, wobei $p_1(t) = 1 + t^2$, $p_2(t) = 1 t^2$, $p_3(t) = 1 + t^2 + t^4$, $q_1(t) = t$ und $q_2(t) = 3t + 2t^3$.
- **d)** Welches ist die neue Matrix B, die A nach diesem Basiswechsel (die neuen Basen sind in **c)** gegeben) beschreibt?
- **5.** (6 Punkte) Gegeben ist für $n \in \mathbb{N}$ mit n > 1 und $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} .$$

- a) Zeigen Sie, dass b a ein Eigenwert von A ist.
- **b**) Bestimmen Sie die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert b-a.
- c) Finden Sie einen Eigenvektor zu einem Eigenwert $\lambda \neq (b-a)$ von A.
- **6. (6 Punkte)** Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen.
 - a) Es bezeichne $i = \sqrt{-1}$ eine komplexe Einheitswurzel. Die Matrix

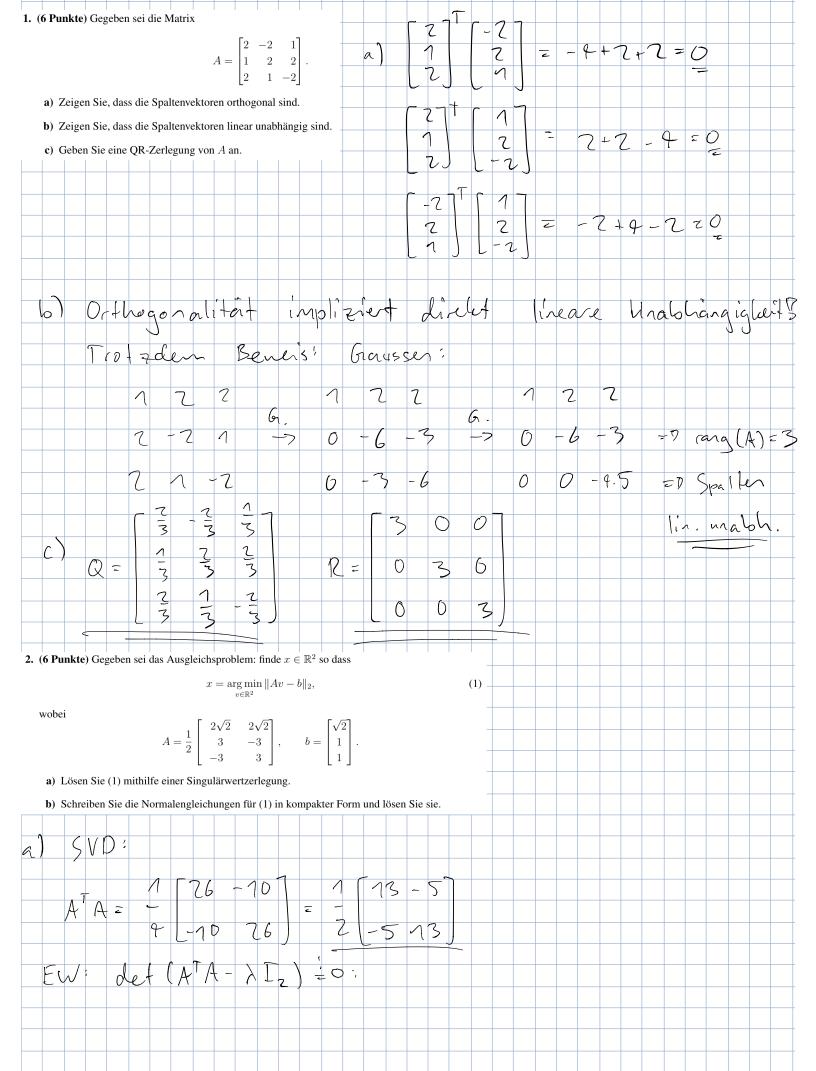
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

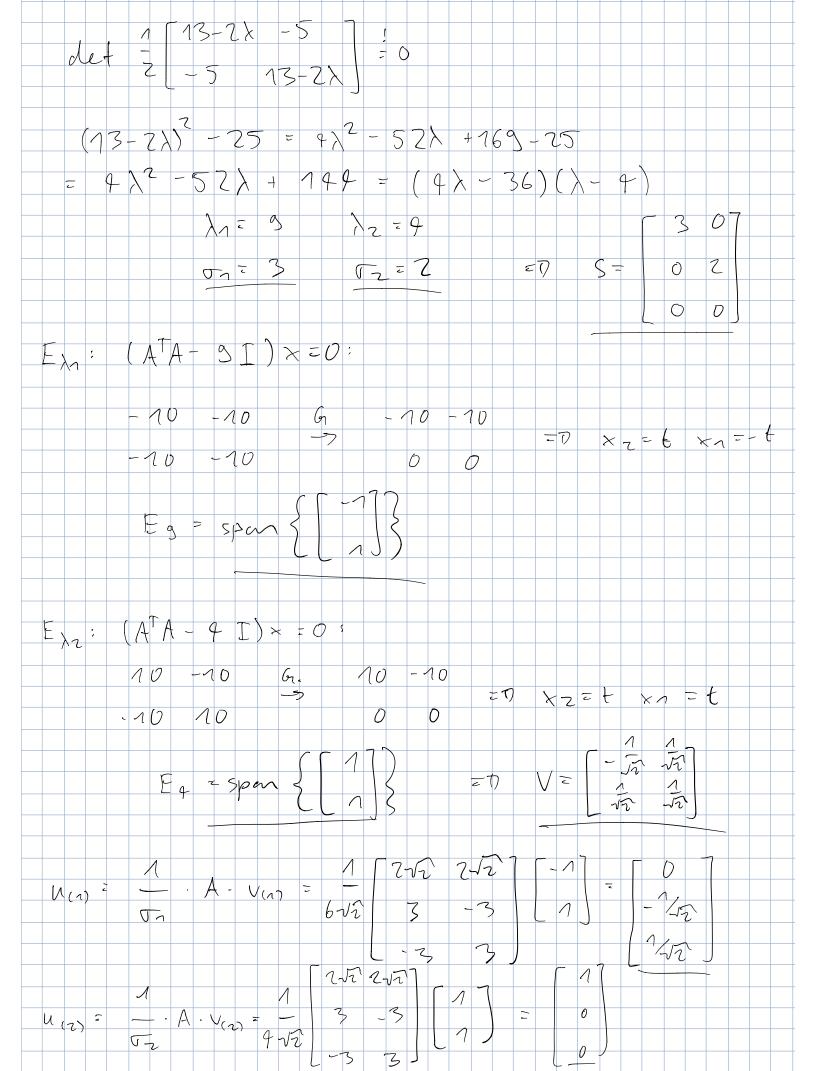
ist unitär.

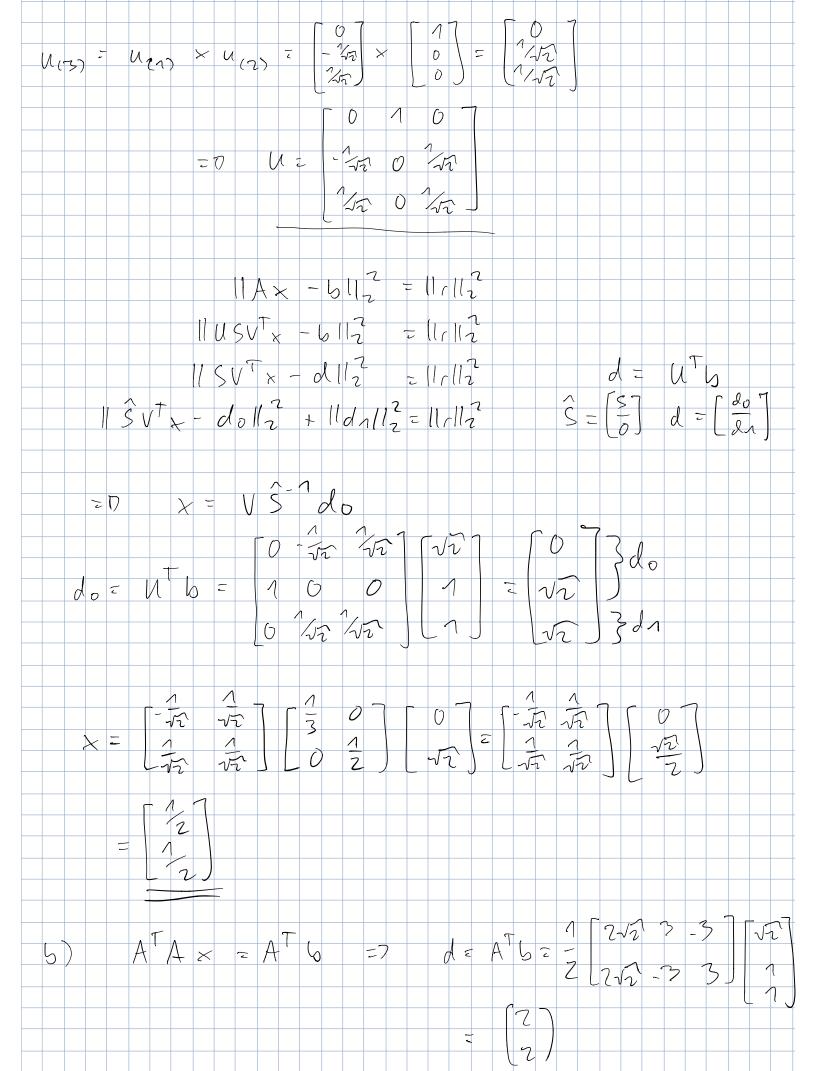
- **b)** Gegeben sei ein Erzeugendensystem $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ von V mit $\dim(V) = n$. Dann sind die Vektoren $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ linear unabhängig.
- c) Gegeben seien eine invertierbare Matrix S und Diagonalmatrizen D_1 und D_2 . Für $A = SD_1S^{-1}$ und $B = SD_2S^{-1}$ gilt $(A B)^2 = A^2 + B^2 2AB$.
- **d)** Für eine symmetrische Matrix A definiert x^TAy ein Skalarprodukt.
- e) Eine QR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

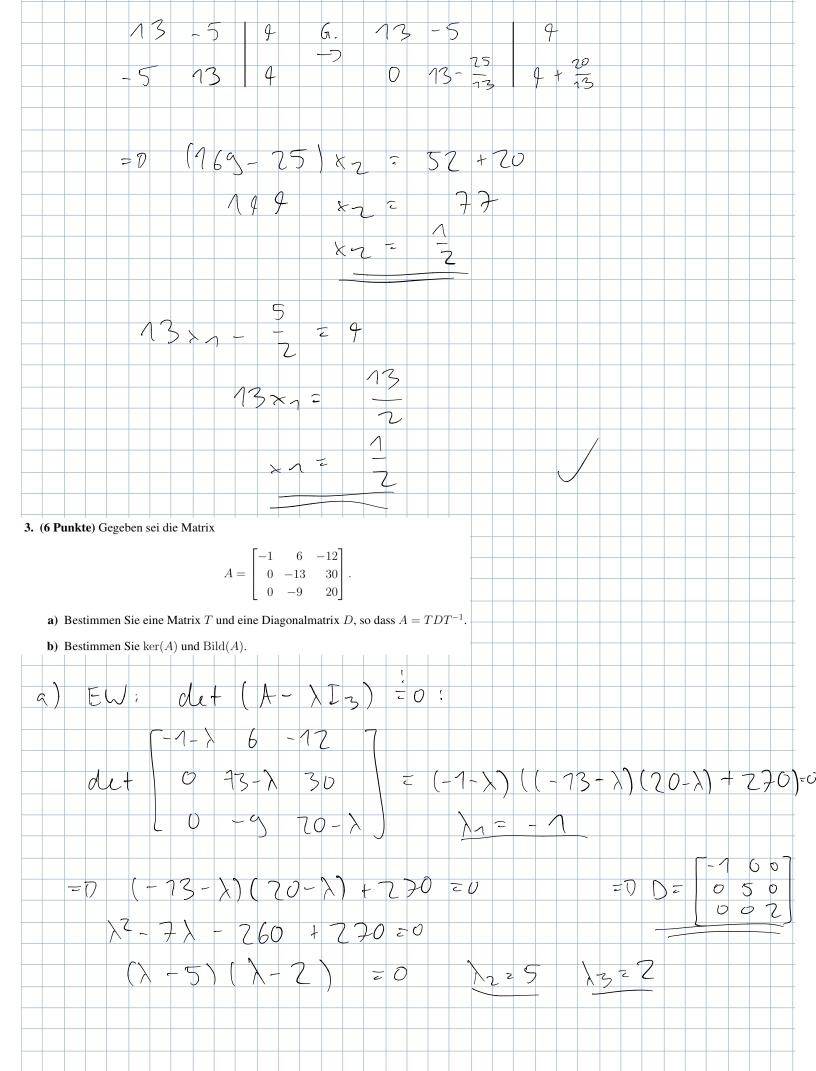
$$R = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

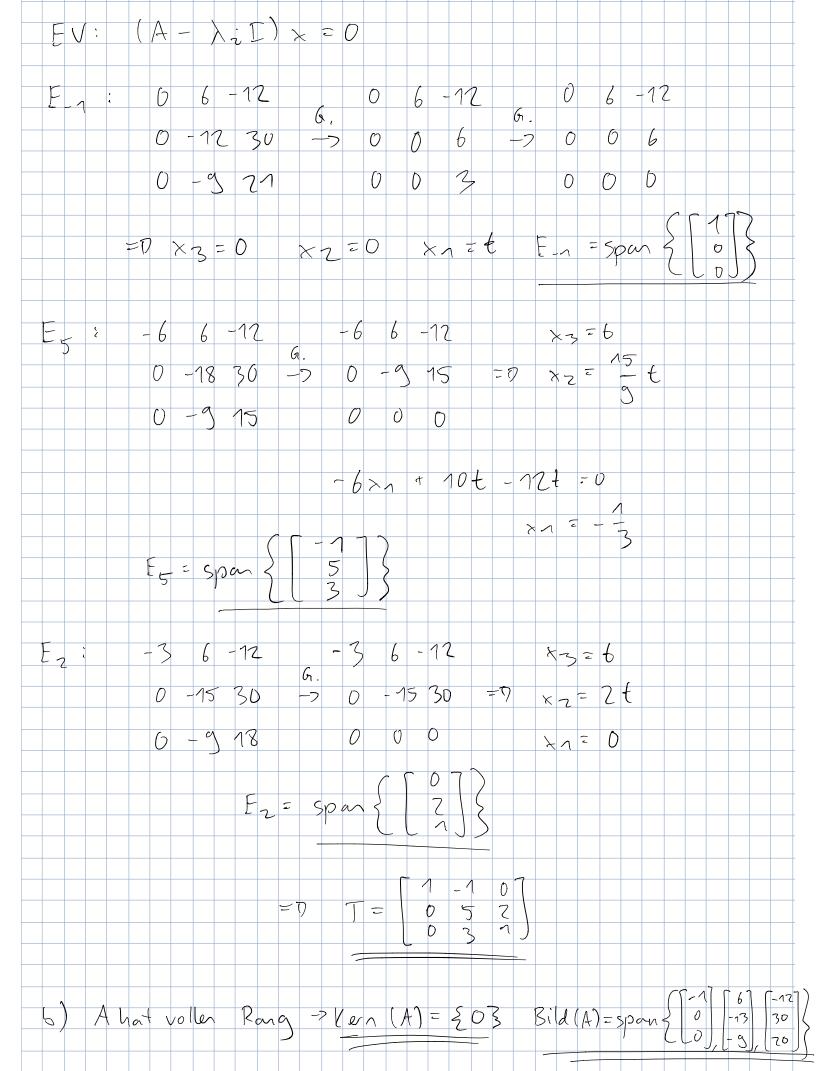
Daraus folgt det(A) = 36.



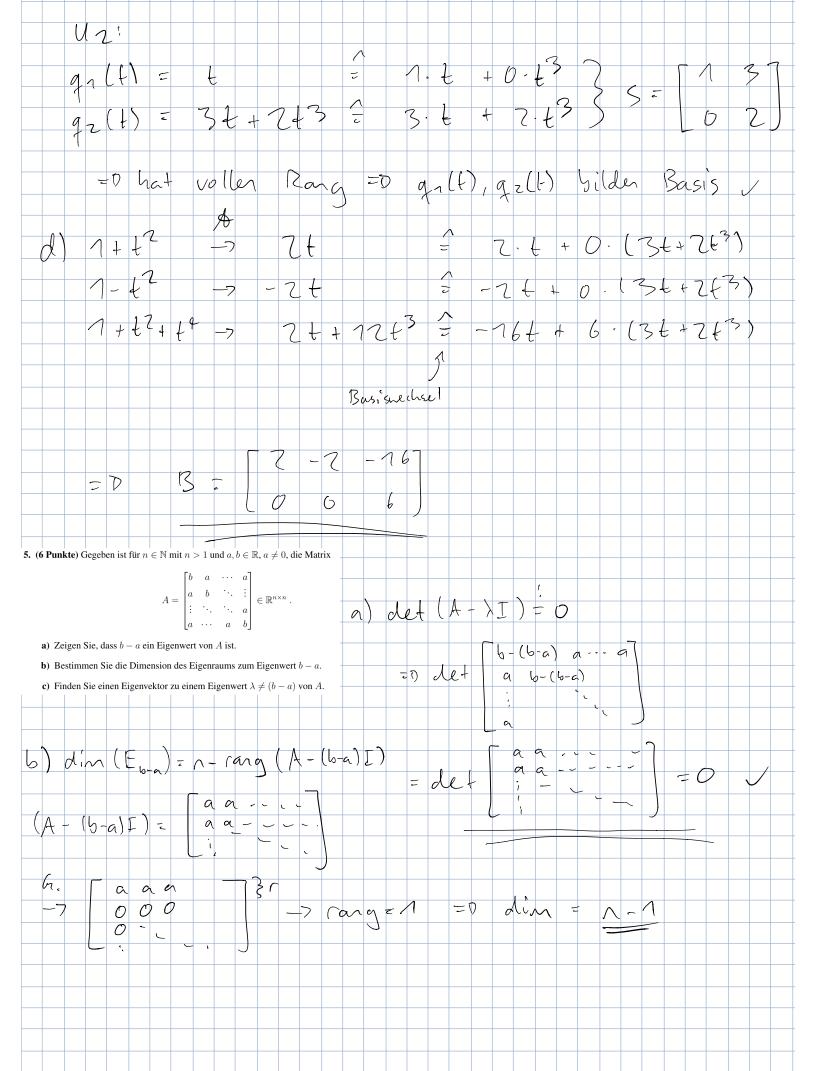


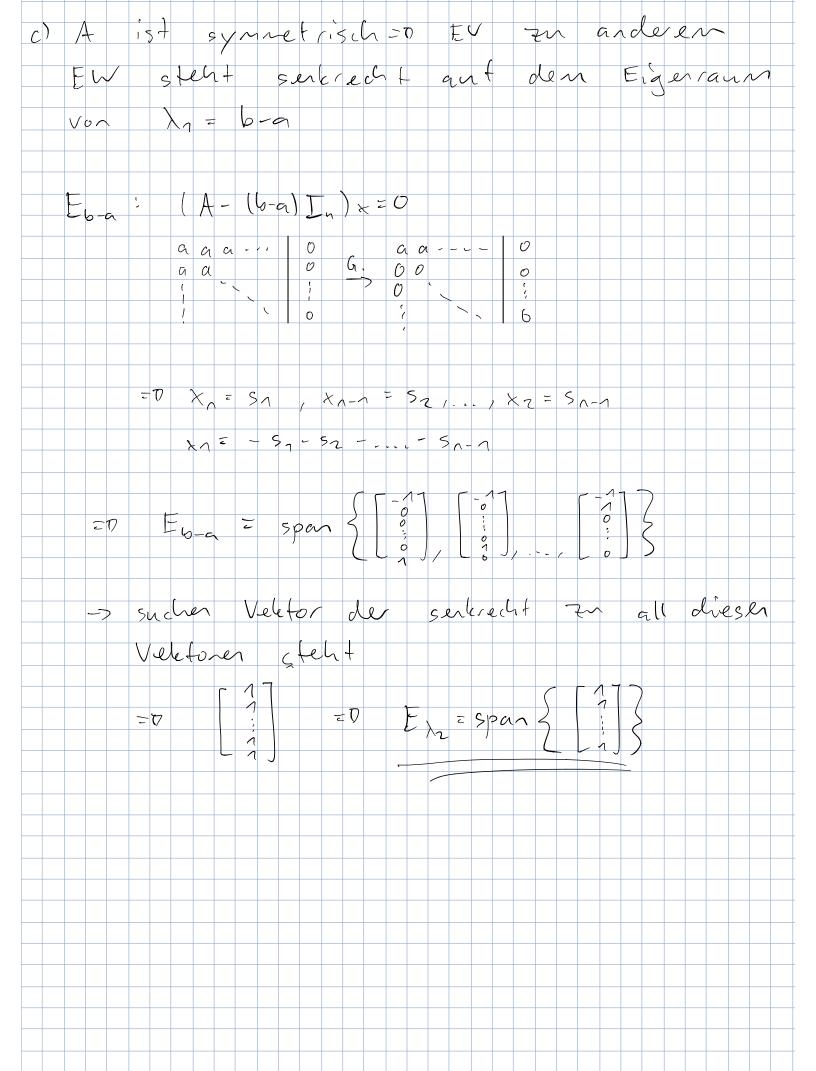


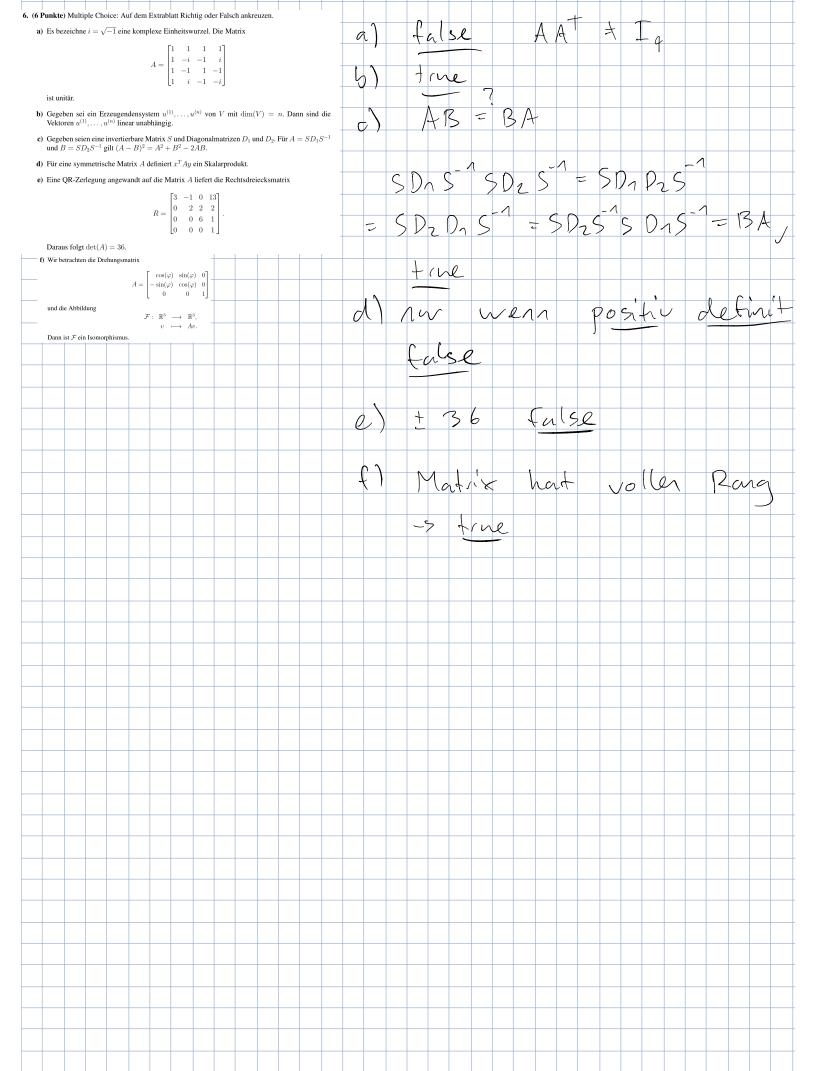




	Pun an $\{r_0\}$ iert f	$0, r_2$	$, r_4 \}$	un	$d \mathcal{U}$	2 =	sp	an{	r_1	r_3	. В																																	_		
										{	$x \vdash \mathcal{A}($	\overrightarrow{x})(4 (x	(t)	x''	(t).																										_				
8	ı) Ze	eiger	ı Sie	e, da	ass J	4 eii	ne l	ine	are	`																															+	+	+	\dashv		
) Dı	ırch	we!	lche	Ма										en	n w	ir	die	Μ	lon	om	e a	ls I	3ase	en i	in b	eid	en F	Räu	1-																
) Ze	en ve eiger (t) =	ı Si	e, d	ass	$\{p_1, (t):$	$p_2, = 1$	$p_3 + 1 + 1$	} ur t ² +	nd \cdot	$\{q_1, q_1, q_1, q_1, q_2, q_1, q_2, q_1, q_2, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_6, q_6, q_6, q_6, q_6, q_6, q_6$	q_2 (t)	} B =	ase	en nd	von $q_2($	(\mathcal{G}_t)	7₃ u = :	$\frac{1}{3}$	<i>U</i> :	$_2$ si $_2t^3$.	nd,	, w	obe	i p	$_{1}(t)$) =	1 -	+ t	2,																
Ċ	() W	elch						atri	x B	, d	ie .	A r	nacl	h d	lies	em	В	asi	sw	ecl	nsel	l (c	lie	neu	ien	Ва	isen	sin	ıd i	in																
a))	7	, e	.G.	e	1	;				1)			Ú	1	(a	(ŧ)	+	C	(Ł)) :		A	<u>}</u> (a	(1	[))	+	Å) (s(ŧ))					
				J							7			,	Ä	, } (/	×	0	i (ŀ))		1		0	(9	1	(,	a (<u> </u>)												
		Z,	- 4	. (,		<u>. [</u>	0			-	0	c 6	1		(,	. ^		1	Ľ,																									
		A.		13 0	Ĺ,	(.)		+	B		_/	1 5 1	7	ľ		'n			_	J		1	۱.۱	1		h	L	1 1	'.\	\	ч.	,	-	1	(! ((1		. /	2 [((_	E)	\		
		T	(Ω	L'	t /		1	(3	Ĺ)(_ t	,	<u>'</u>) '			t		. (a		t .	Ţ		9	У	Lt	·))					a	(V /	7	- -		<u></u>					
	()	-	Ł	; C	(1 n	L.	())	+			5	ŧ	l,	, O	(ŧ	-)		-	-		5	0		α	L	L.)	,	H	4		A	(5	C	f,))	J	/					
6		/	1	Я) >			0)			-	^				()	-	Ł		H	<u> </u>	0		Į.	3)											_				
		1	2	_	-)			γ.	ŧ				^			-		7 ,		Ļ		+	•	(^		ł	7			1	/ >		Ţ	+	c			0		2		ć)	7		
		1	9		-)		1	7	+.	3		,	_				C	_ ?	,	t	-	7		1			F	3		\int				\	_	L		0)	С) <i>'</i>	1	2		_	
			,						. 0			7	1																																_	
							ľΛ		l }		re		<u>بر</u>																																	
											, ()																															+			
C		(-	12	>	,											^																			<i>a</i> -							_	+			
		Pn	L	. Ł `)	-	-		1	+		ر د	Z							1	•		1		7	/	Į.	+		L	+	C) -	t	. <i>T</i>							1		1	1	7
	j	77	_(†)		2	=		1	_	€	- 7								/	1 -	. ,	1	_	-	,	1 -	ŧ	-	_	+		0	٠ ﴿	- 4	(>		T	=		7)	-1 0	/	7
	J	0 1	3 l	()		Ž	-		1	7	- Ł	<u> </u>	+	+	- 9 -		-			/	,		1	+		/	1.	Ł	5	7	7		1	·	Eª						+	Ť	+	#		,
		ho	λ . Ι	-				17.	oli	0.	1			2	cr	۷.	<u>م</u>	7			5	(n 201 4	G (ر م ر	55	er				Λ C		-	1		1			رعہ	>	7	a	+	#		
		v 10				,								+																	C)		O		1					2	+	_	+		
	1	-1)		p	(ŀ)/	ŗ	7	(Ł.)	ŗ) ~	<u> </u>	ł)		0	, () (/	1		(',	7	-	ι	11	a	5l	20	1	gi	9	-	>)	e	·-	Q		\$0 =	251	15	V	on Gi







f) Wir betrachten die Drehungsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und die Abbildung

$$\mathcal{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$v \longmapsto Av.$$

Dann ist \mathcal{F} ein Isomorphismus.

5. (6 Punkte) Gegeben ist für $n \in \mathbb{N}$ mit n > 1 und $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} .$$

- a) Zeigen Sie, dass b-a ein Eigenwert von A ist.
- **b**) Bestimmen Sie die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert b-a.
- c) Finden Sie einen Eigenvektor zu einem Eigenwert $\lambda \neq (b-a)$ von A.

