Dr. V. Gradinaru D-ITET, D-MATL, RW Sommer 2017

Basisprüfung Lineare Algebra

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet (jeweils 6 Punkte).
- Begründen Sie Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung von Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Lineare Algebra	
Datum	21.8.2017	

1	2	3	4	5	6	Punkte

- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite, und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift schreiben. Auch nicht mit rot oder grün.
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

1. (6 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

2. (6 Punkte) Gegeben sei das Ausgleichsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^2$ so dass

$$x = \arg\min_{v \in \mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2, \tag{1}$$

wobei

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Lösen Sie (1) mithilfe einer Singulärwertzerlegung.

b) Schreiben Sie die Normalengleichungen für (1) in kompakter Form und lösen Sie sie.

3. (6 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

b) Bestimmen Sie $\ker(A)$ und $\mathrm{Bild}(A)$.

4. (6 Punkte) Für alle $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sei $r_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $r_i(t) = t^i$. Sei $\mathcal{G}_3 = \mathrm{span}\{r_0, r_2, r_4\}$ und $\mathcal{U}_2 = \mathrm{span}\{r_1, r_3\}$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}\colon \mathcal{G}_3 \to \mathcal{U}_2$ definiert für alle $x \in \mathcal{G}_3$ und alle $t \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} x \mapsto \mathcal{A}(x), \\ \mathcal{A}(x)(t) = tx''(t). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben, wenn wir die Monome als Basen in beiden Räumen verwenden?

Siehe nächstes Blatt!

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ und $\mathcal{U}_2$ sind, wobei $p_1(t) = 1 + t^2$, $p_2(t) = 1 - t^2$, $p_3(t) = 1 + t^2 + t^4$, $q_1(t) = t$ und $q_2(t) = 3t + 2t^3$.

d) Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{A}$ nach diesem Basiswechsel (die neuen Basen sind in **c)** gegeben) beschreibt?

5. (6 Punkte) Gegeben ist für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} .$$

a) Zeigen Sie, dass $b - a$ ein Eigenwert von A ist.

b) Bestimmen Sie die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert $b - a$.

c) Finden Sie einen Eigenvektor zu einem Eigenwert $\lambda \neq (b - a)$ von A.

6. (6 Punkte) Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen.

a) Es bezeichne $i = \sqrt{-1}$ eine komplexe Einheitswurzel. Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

ist unitär.

b) Gegeben sei ein Erzeugendensystem $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ von V mit $\dim(V) = n$. Dann sind die Vektoren $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ linear unabhängig.

c) Gegeben seien eine invertierbare Matrix S und Diagonalmatrizen D_1 und D_2. Für $A = SD_1S^{-1}$ und $B = SD_2S^{-1}$ gilt $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$.

d) Für eine symmetrische Matrix A definiert x^TAy ein Skalarprodukt.

e) Eine QR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Daraus folgt $\det(A) = 36$.

Bitte wenden!

1. (6 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren orthogonal sind.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.

c) Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

a) $$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -4+2+2 = \underline{\underline{0}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2+2-4 = \underline{\underline{0}}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = -2+4-2 = \underline{\underline{0}}$$

b) Orthogonalität impliziert direkt lineare Unabhängigkeit!

Trotzdem Beweis: Gaussen:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -4.5 \end{matrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 3$$

$\Rightarrow$ Spalten $\underline{\underline{\text{lin. unabh.}}}$

c) $$\underline{\underline{Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}}} \qquad \underline{\underline{R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}}$$

2. (6 Punkte) Gegeben sei das Ausgleichsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^2$ so dass

$$x = \arg\min_{v \in \mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2, \qquad (1)$$

wobei

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Lösen Sie (1) mithilfe einer Singulärwertzerlegung.

b) Schreiben Sie die Normalengleichungen für (1) in kompakter Form und lösen Sie sie.

a) SVD:

$$A^T A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 26 & -10 \\ -10 & 26 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}}$$

EW: $\det(A^T A - \lambda I_2) \overset{!}{=} 0$:

$$\det \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13-2\lambda & -5 \\ -5 & 13-2\lambda \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$(13-2\lambda)^2 - 25 = 4\lambda^2 - 52\lambda + 169 - 25$$

$$= 4\lambda^2 - 52\lambda + 144 = (4\lambda - 36)(\lambda - 4)$$

$$\lambda_1 = 9 \qquad \lambda_2 = 4$$

$$\underline{\sigma_1 = 3} \qquad \underline{\sigma_2 = 2} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

E_{λ_1}: $(A^TA - 9I)x = 0$:

$$\begin{matrix} -10 & -10 \\ -10 & -10 \end{matrix} \quad \xrightarrow{G} \quad \begin{matrix} -10 & -10 \\ 0 & 0 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \quad x_2 = t \quad x_1 = -t$$

$$\underline{E_9 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

E_{λ_2}: $(A^TA - 4I)x = 0$:

$$\begin{matrix} 10 & -10 \\ -10 & 10 \end{matrix} \quad \xrightarrow{G.} \quad \begin{matrix} 10 & -10 \\ 0 & 0 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \quad x_2 = t \quad x_1 = t$$

$$\underline{E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{V = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}$$

$$u_{(1)} = \frac{1}{\sigma_1} \cdot A \cdot v_{(1)} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

$$u_{(2)} = \frac{1}{\sigma_2} \cdot A \cdot v_{(2)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_{(3)} = u_{(1)} \times u_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|r\|_2^2$$

$$\|USV^T x - b\|_2^2 = \|r\|_2^2$$

$$\|SV^T x - d\|_2^2 = \|r\|_2^2 \qquad d = U^T b$$

$$\|\hat{S} V^T x - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2 = \|r\|_2^2 \qquad \hat{S} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = V \hat{S}^{-1} d_0$$

$$d_0 = U^T b = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{matrix}\right\} d_0 \\ \left.\sqrt{2}\right\} d_1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}}$$

b) $$A^T A x = A^T b \quad \Rightarrow \quad d = A^T b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 3 & -3 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 13 & -5 & 4 \\ -5 & 13 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cc|c} 13 & -5 & 4 \\ 0 & 13-\frac{25}{13} & 4+\frac{20}{13} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad (169-25)\,x_2 = 52+20$$

$$144 \quad x_2 = 77$$

$$\underline{\underline{x_2 = \frac{1}{2}}}$$

$$13x_1 - \frac{5}{2} = 4$$

$$13x_1 = \frac{13}{2}$$

$$\underline{\underline{x_1 = \frac{1}{2}}}$$

✓

3. (6 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -12 \\ 0 & -13 & 30 \\ 0 & -9 & 20 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$.

b) Bestimmen Sie $\ker(A)$ und $\mathrm{Bild}(A)$.

a) EW: $\det(A - \lambda I_3) \overset{!}{=} 0$:

$$\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 6 & -12 \\ 0 & -13-\lambda & 30 \\ 0 & -9 & 20-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)\big((-13-\lambda)(20-\lambda)+270\big) = 0$$

$$\underline{\lambda_1 = -1}$$

$$\Rightarrow \quad (-13-\lambda)(20-\lambda)+270 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda - 260 + 270 = 0$$

$$(\lambda-5)(\lambda-2) = 0 \qquad \underline{\lambda_2 = 5} \qquad \underline{\lambda_3 = 2}$$

$$\Rightarrow D = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}}$$

EV: $(A - \lambda_i I)x = 0$

E_{-1}: $\begin{matrix} 0 & 6 & -12 \\ 0 & -12 & 30 \\ 0 & -9 & 21 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow x_3 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_1 = t \quad \underline{E_{-1} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}$

E_5: $\begin{matrix} -6 & 6 & -12 \\ 0 & -18 & 30 \\ 0 & -9 & 15 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} -6 & 6 & -12 \\ 0 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = t \\ x_2 = \frac{15}{9} t \end{matrix}$

$-6x_1 + 10t - 12t = 0$

$x_1 = -\frac{1}{3}$

$\underline{E_5 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}$

E_2: $\begin{matrix} -3 & 6 & -12 \\ 0 & -15 & 30 \\ 0 & -9 & 18 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \begin{matrix} -3 & 6 & -12 \\ 0 & -15 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = t \\ x_2 = 2t \\ x_1 = 0 \end{matrix}$

$\underline{E_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}}}$$

b) A hat vollen Rang $\rightarrow \underline{\underline{\text{Kern}(A) = \{0\}}}$ $\underline{\underline{\text{Bild}(A) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -13 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}\right\}}}$

4. (6 Punkte) Für alle $i \in \{0,1,2,3,4\}$ sei $r_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $r_i(t) = t^i$. Sei $\mathcal{G}_3 = \operatorname{span}\{r_0, r_2, r_4\}$ und $\mathcal{U}_2 = \operatorname{span}\{r_1, r_3\}$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{A}\colon \mathcal{G}_3 \to \mathcal{U}_2$ definiert für alle $x \in \mathcal{G}_3$ und alle $t \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{cases} x \mapsto \mathcal{A}(x), \\ \mathcal{A}(x)(t) = t x''(t). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{A}$ beschrieben, wenn wir die Monome als Basen in beiden Räumen verwenden?

c) Zeigen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$ Basen von $\mathcal{G}_3$ und $\mathcal{U}_2$ sind, wobei $p_1(t) = 1 + t^2$, $p_2(t) = 1 - t^2$, $p_3(t) = 1 + t^2 + t^4$, $q_1(t) = t$ und $q_2(t) = 3t + 2t^3$.

d) Welches ist die neue Matrix B, die $\mathcal{A}$ nach diesem Basiswechsel (die neuen Basen sind in **c)** gegeben) beschreibt?

a) Regeln:

1) $\mathcal{A}(a(t) + b(t)) \overset{!}{=} \mathcal{A}(a(t)) + \mathcal{A}(b(t))$

2) $\mathcal{A}(\alpha a(t)) \overset{!}{=} \alpha \mathcal{A}(a(t))$

Kombinierte überprüfung:

$\mathcal{A}(a(t) + \beta b(t)) = t(a(t) + \beta b(t))'' = t(a''(t) + \beta b''(t))$

$= t a''(t) + \beta t b''(t) = \mathcal{A}(a(t)) + \beta \mathcal{A}(b(t))$ ✓

b)

$$\left.\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{\mathcal{A}} 0 \;\hat{=}\; 0 \cdot t + 0 \cdot t^3 \\ t^2 &\to 2t \;\hat{=}\; 2 \cdot t + 0 \cdot t^3 \\ t^4 &\to 12t^3 \;\hat{=}\; 0 \cdot t + 12 \cdot t^3 \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}}}$$

in der neuen Basis

c) G_3:

$$\left.\begin{aligned} p_1(t) &= 1 + t^2 \;\hat{=}\; 1 \cdot 1 + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^4 \\ p_2(t) &= 1 - t^2 \;\hat{=}\; 1 \cdot 1 - 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^4 \\ p_3(t) &= 1 + t^2 + t^4 \;\hat{=}\; 1 \cdot 1 + 1 \cdot t^2 + 1 \cdot t^4 \end{aligned}\right\} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hat T vollen Rang? $\to$ Gaussen: $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ $\to$ <u>Ja</u>

$\Rightarrow p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ sin lin. unabhängig $\Rightarrow$ eine <u>Basis</u> von G_3

U_2:

$$q_1(t) = t \;\hat{=}\; 1\cdot t + 0\cdot t^3$$
$$q_2(t) = 3t + 2t^3 \;\hat{=}\; 3\cdot t + 2\cdot t^3$$
$$\Bigg\}\; S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ hat vollen Rang $\Rightarrow$ $q_1(t), q_2(t)$ bilden Basis ✓

d)
$$\begin{aligned}
1+t^2 &\xrightarrow{A} 2t &&\hat{=}\; 2\cdot t + 0\cdot(3t+2t^3) \\
1-t^2 &\rightarrow -2t &&\hat{=}\; -2t + 0\cdot(3t+2t^3) \\
1+t^2+t^4 &\rightarrow 2t+12t^3 &&\hat{=}\; -16t + 6\cdot(3t+2t^3)
\end{aligned}$$

Basiswechsel

$$\Rightarrow \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

5. **(6 Punkte)** Gegeben ist für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

a) Zeigen Sie, dass $b - a$ ein Eigenwert von A ist.

b) Bestimmen Sie die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert $b - a$.

c) Finden Sie einen Eigenvektor zu einem Eigenwert $\lambda \neq (b - a)$ von A.

a) $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} b-(b-a) & a \cdots & a \\ a & b-(b-a) & \\ \vdots & & \ddots \\ a & & \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} a & a & \cdots \\ a & a & \cdots \\ \vdots & & \ddots \\ \vdots & & \end{bmatrix} = 0 \;✓$$

b) $\dim(E_{b-a}) = n - \operatorname{rang}(A - (b-a)I)$

$$(A - (b-a)I) = \begin{bmatrix} a & a & \cdots \\ a & a & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{G.} \begin{bmatrix} a & a & a & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \cdots & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \}r \rightarrow \operatorname{rang} = 1 \Rightarrow \dim = \underline{\underline{n-1}}$$

c) A ist symmetrisch $\Rightarrow$ EV zu anderen EW steht senkrecht auf dem Eigenraum von $\lambda_1 = b-a$

E_{b-a} : $(A-(b-a)I_n)x=0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & a & a & \cdots & 0 \\ a & a & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cccc|c} a & a & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ $x_n = s_1$, $x_{n-1} = s_2, \dots, x_2 = s_{n-1}$

$x_1 = -s_1 - s_2 - \dots - s_{n-1}$

$$\Rightarrow \quad E_{b-a} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\\vdots\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$\rightarrow$ suchen Vektor der senkrecht zu all diesen Vektoren steht

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E_{\lambda_2} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right\}}}$$

6. (6 Punkte) Multiple Choice: Auf dem Extrablatt Richtig oder Falsch ankreuzen.

a) Es bezeichne $i = \sqrt{-1}$ eine komplexe Einheitswurzel. Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

ist unitär.

b) Gegeben sei ein Erzeugendensystem $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ von V mit $\dim(V) = n$. Dann sind die Vektoren $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ linear unabhängig.

c) Gegeben seien eine invertierbare Matrix S und Diagonalmatrizen D_1 und D_2. Für $A = SD_1S^{-1}$ und $B = SD_2S^{-1}$ gilt $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$.

d) Für eine symmetrische Matrix A definiert $x^T Ay$ ein Skalarprodukt.

e) Eine QR-Zerlegung angewandt auf die Matrix A liefert die Rechtsdreiecksmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt $\det(A) = 36$.

f) Wir betrachten die Drehungsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und die Abbildung

$$\mathcal{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \longmapsto Av.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ ein Isomorphismus.

a) false $\quad AA^T \neq I_4$

b) true

c) $AB \overset{?}{=} BA$

$SD_1S^{-1}SD_2S^{-1} = SD_1D_2S^{-1}$

$= SD_2D_1S^{-1} = SD_2S^{-1}SD_1S^{-1} = BA$ ✓

true

d) nur wenn positiv definit

false

e) ± 36 false

f) Matrix hat vollen Rang

$\to$ true

f) Wir betrachten die Drehungsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ v &\longmapsto Av. \end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{F}$ ein Isomorphismus.

5. (6 Punkte) Gegeben ist für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

a) Zeigen Sie, dass $b - a$ ein Eigenwert von A ist.

b) Bestimmen Sie die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert $b - a$.

c) Finden Sie einen Eigenvektor zu einem Eigenwert $\lambda \neq (b - a)$ von A.

a) $\det(A - \lambda I_n) \overset{!}{=} 0$

$$\det \begin{bmatrix} b-(b-a) & a & a & \cdots \\ a & b-(b-a) & & \\ a & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\det \begin{bmatrix} a & a & a & \cdots \\ a & \ddots & & \\ a & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\det \begin{bmatrix} a & a & a & \cdots \\ 0 & 0 & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} = 0 \quad ✓$$

b) $\underbrace{}_{n-1}$ freie Parameter $\Rightarrow \dim(E_\lambda) = \underline{\underline{n-1}}$

c) <u>muss</u> $\perp$ auf E_λ stehen

$E_{\lambda_1} := \quad (A - \lambda_1 I_n)\, x = 0$

$$\begin{bmatrix} a & a & a & \cdots & \\ a & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$x_3 = s$

$x_2 = t$

$x_1 = -3t - 5s$

$\Rightarrow \quad x_n = s_1$

$x_{n-1} = s_2$

$\vdots$

$x_2 = s_{n-1}$

$x_1 = -s_1 - s_2 - \dots - s_{n-1}$

$$E_{\lambda_1} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$